Weakly symmetric spaces and Riemannian g.o. spaces (Homogeneous Structures and Theory of Submanifolds)

田丸, 博士

数理解析研究所講究録
1069 巻 1998 年 43-52

Weakly symmetric spaces and Riemannian g.o. spaces

上智大学理工学部　田丸　博士　(Hiroshi Tamaru)

Abstract

コンパクト既約対称空間上の fiber 束 $H/K \to G/K \to G/H$ から, 内積付きの 2-step nilpotent Lie 環 $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle)$ を構成する. $\mathfrak{n}$ の連結かつ単連結な Lie 群を N, $\langle\ ,\ \rangle$ から決まる左不変計量を同じ記号で表すことにすると, $(N, \langle\ ,\ \rangle)$ の性質を上の fiber 束を使って調べる事ができる. 特に G/K と N の間には, 弱対称であるか, g.o. であるか, といったことについて関連がある.

1 Introduction

左不変計量の入った連結かつ単連結 2-step nilpotent Lie 群 $(N, \langle\ ,\ \rangle)$ についての研究は最近活発に行われており, Riemann 多様体として非常に良い性質を持つものが多く見出されている. しかし現在までに研究されているクラスはそれほど多くはない.

今回我々が調べるのは, 連結 Riemann 多様体 (M, g) に関する次の性質である：

(i) M の任意の 2 点を等長変換で取り換えることができる ($\Leftrightarrow$ 弱対称空間).

(ii) M の全ての測地線は等長変換群の 1-parameter 部分群の軌道である ($\Leftrightarrow$ g.o. space).

対称空間は弱対称であり, 弱対称空間は g.o. である ([1]). 弱対称空間は, 対称空間の持つ良い性質を引き継ぐことがいくつか知られている (cf. [4]).

弱対称空間は isotropy 表現で特徴付けられることが W. Ziller によって証明された.

定理 1 ([15]) 連結リーマン多様体 (M, g) の等長変換群を G, 原点 o での *isotropy* 部分群を K で表す. このとき, (M, g) が弱対称であるための必要十分条件は, T_oM の任意の元を K の作用で -1 倍できることである.

また今のところ知られている対称でない弱対称空間の例は, 対称空間上の fiber 束または 2-step nilpotent Lie 群のいづれかである. そこで,

「対称空間上の fiber 束 $H/K \to G/K \to G/H$ から G/K と同じ isotropy 表現を持つ 2-step nilpotent Lie 群を構成する」

というのは自然な目標であろう. このことによって, 弱対称空間全体の中で対称空間上の fiber 束 となっているものの話と 2-step nilpotent Lie 群になっているものの話を繋げることができる. さらに, g.o. であるかどうかについても関係があることが分かる.

2 Preliminaries on 2-step nilpotent Lie groups

まず, 2-step nilpotent Lie 群について簡単にまとめておきたい.

$(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle)$ を内積の入った 2-step nilpotent Lie 環とする. $\mathfrak{n}$ の center を $\mathfrak{z}$, その直交補空間を $\mathfrak{v}$ で表す. 線形写像 $J:\mathfrak{z}\to \mathrm{End}(\mathfrak{v})$ を

$$\langle J_Z(X), Y\rangle = \langle Z, [X,Y]\rangle \text{ for every } X, Y\in\mathfrak{v} \tag{1}$$

によって定義する.

この写像 J が singular (resp. non-singular) であるときに, $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle)$ が singular (resp. non-singular) であると呼ぶ. 特に, non-singular でかつ J が非常にきれいな形をしている, 次のクラスについては良く調べられている.

定義 2 $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle)$ は次の条件を満たす時 *H-type* であるという：

$$J_Z^2 = -\langle Z, Z\rangle\cdot 1_{\mathfrak{v}} \text{ for every } Z\in\mathfrak{z}. \tag{2}$$

H-type algebra は A. Kaplan ([9]) によって導入された. (H-type algebra とは generalized Heisenberg algebra を省略した呼び方である.) 条件 (2) は $\mathfrak{v}$ が $Cl(\mathfrak{z}, \langle\ ,\ \rangle)$-module となることと同等である. 逆に, $\mathfrak{v}$ が $Cl(\mathfrak{z}, \langle\ ,\ \rangle)$-module であったとすると, 線形写像 $J:\mathfrak{z}\to \mathrm{End}(\mathfrak{v})$ を Clifford module としての作用によって定義し, 条件 (1) によって bracket 積を定めることによって H-type algebra を構成することができる. このことから, H-type algebra の分類は Clifford module の分類に帰着させて行うことができる.

Clifford algebra $Cl(\mathfrak{z}, \langle\ ,\ \rangle)$ の表現については良く知られている. $\dim\mathfrak{z}\neq 3 \pmod 4$ の時, 既約な $Cl(\mathfrak{z}, \langle\ ,\ \rangle)$-module は 1 つしかない. それを $\mathfrak{v}_1$ で表すことにしよう. $\mathfrak{v}:=\oplus^k\mathfrak{v}_1$ から上の方法で構成された H-type algebra を $\mathfrak{n}(k)$ で表す. $\dim\mathfrak{z}=3 \pmod 4$ の時, 既約な $Cl(\mathfrak{z}, \langle\ ,\ \rangle)$-module は 2 つあり, それらの次元は等しい. それらを $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ で表すことにする. 先の場合と同様に, $\mathfrak{v}:=(\oplus^{k_1}\mathfrak{v}_1)\oplus(\oplus^{k_2}\mathfrak{v}_2)$ から構成された H-type algebra を $\mathfrak{n}(k_1,k_2)$ で表す. ここで, $\mathfrak{n}(k_1,k_2)\cong\mathfrak{n}(k_2,k_1)$ であるので, $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ のとり方は気にしなくてよい.

$\mathfrak{n}$ を Lie 環とする連結かつ単連結 Lie 群を N, 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ から決まる N の左不変計量を同じ $\langle\ ,\ \rangle$ で表す.

命題 3 ([6]) $(N, \langle\ ,\ \rangle)$ の等長変換群の単位元 1 での *isotropy* 部分群を $A(N)$ で表すと,

$$A(N) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{n})\cap O(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle). \tag{3}$$

特に H-type group の場合には, isotropy 部分群 $A(N)$ は完全に決定されている ([12]). さらに, H-type group で弱対称となるものおよび g.o. になるものの分類も知られている.

定理 4 ([2], [13]) *H-type group で g.o. space となるものは次のいずれかである :*

(i) $\dim\mathfrak{z}=1,2,3$, *or*

(ii) $\dim\mathfrak{z}=5$ *and* $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}(1)$, *or*

(iii) $\dim\mathfrak{z}=6$ *and* $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}(1)$, *or*

(iv) $\dim\mathfrak{z}=7$ *and* $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}(1,0)$, $\mathfrak{n}(2,0)$, *or* $\mathfrak{n}(3,0)$.

これらの中で弱対称にならないものは $\dim\mathfrak{z}=7$ *and* $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}(3,0)$ のみである.

H-type でない 2-step nilpotent 群についてはあまり調べられていなかったが, 最近森 ([10]) は singular なものを含む新しいクラスについて研究している. その仕事から本稿の研究は多大な影響を受けており, また次節で説明する 2-step nilpotent Lie 環の構成は, 森の構成法の拡張となっている.

$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}=\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}_{-2}\oplus\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}_{-1}\oplus\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}_{0}\oplus\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}_{1}\oplus\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}_{2}$ を第 2 種複素単純 graded Lie 環とする. (すなわち, 全ての k,l に対して $[\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}_{k},\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}_{l}]\subset\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}_{k+l}$ が成立.) 明らかに $\mathfrak{n}:=\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}_{1}\oplus\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}_{2}$ は 2-step nilpotent である. 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は, $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ の Weyl basis が正規直交基底になるように入れる. すると $(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$ を複素単純 Lie 環を使って調べることができる. 特に Z を characteristic element としたとき (i.e., 任意の $X\in\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}_{k}$ に対して $[Z,X]=kX$ が成立), 可解 Lie 環 $\mathfrak{s}:=\mathbf{R}Z\oplus\mathfrak{n}$ を考え, その単連結 Lie 群上の Einstein 計量の存在について研究している.

3 Construction of 2-step nilpotent Lie algebras

コンパクト既約対称空間上の fiber 束 $H/K\to G/K\to G/H$ から, 内積付きの 2-step nilpotent Lie 環 $(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$ を構成する方法について説明する.

上の fiber 束を簡単のために (G,H,K) と書くことにする. それぞれの Lie 環を $\mathfrak{g},\mathfrak{h},\mathfrak{k}$ によって表す. 底空間 G/H はコンパクト既約対称空間であると仮定する. すると G の Killing form B によって

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}_B=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}_F\oplus\mathfrak{m}_B$$

という直交分解が得られる. $\mathfrak{n}:=\mathfrak{m}_F\oplus\mathfrak{m}_B$ に Lie 環の構造 $[\ ,\ ]^{\mathfrak{n}}$ を次で定める：

$$[Z+X,Z'+X']^{\mathfrak{n}}:=[X,X']_{\mathfrak{m}_F}\ \text{ for }\ Z,Z'\in\mathfrak{m}_F,\ X,X'\in\mathfrak{m}_B.$$

明らかに $\mathfrak{n}$ は 2-step nilpotent である．さらに $\langle\ ,\ \rangle := -B\,|_{\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}}$ によって内積を定める．この方法で得られた $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle)$ を (G,H,K) から構成された Lie 環と呼ぶことにする．また $\mathfrak{n}$ の連結かつ単連結 Lie 群 N に $\langle\ ,\ \rangle$ から決まる左不変計量を入れたもの, $(N, \langle\ ,\ \rangle)$, を (G,H,K) から構成された Lie 群と呼ぶ.

命題 5 $\mathfrak{m}_F$ は $\mathfrak{n}$ の *center* である.

証明. 積の定義から $\mathfrak{m}_F \subset \mathrm{center}(\mathfrak{n})$ は明らかである．よって, $\mathfrak{m}_B \cap \mathrm{center}(\mathfrak{n}) = \{0\}$ を示せば良い．そのために $\mathfrak{m}_B \cap \mathrm{center}(\mathfrak{n})$ が $\mathfrak{h}$-不変であることを云う.

$Z \in \mathfrak{m}_B \cap \mathrm{center}(\mathfrak{n})$ とする．まず, 任意の $A \in \mathfrak{k}$, $X \in \mathfrak{n}$ に対して,

$$[[A,Z],X]^{\mathfrak{n}} = [[A,Z],X]_{\mathfrak{m}_F} = -[[Z,X],A]_{\mathfrak{m}_F} - [[X,A],Z]_{\mathfrak{m}_F}$$

となる．ここで,

$$\begin{aligned} \text{第 1 項} &= -[[Z,X]_{\mathfrak{m}_F}, A] = -[[Z,X]^{\mathfrak{n}}, A] = 0, \\ \text{第 2 項} &= -[[X,A],Z]^{\mathfrak{n}} = 0 \end{aligned}$$

がいえる．よって $[A,Z] \in \mathfrak{m}_B \cap \mathrm{center}(\mathfrak{n})$ となり, $\mathfrak{m}_B \cap \mathrm{center}(\mathfrak{n})$ が $\mathfrak{k}$-不変であることは示せた．次に, $X_F \in \mathfrak{m}_F$, $X_B \in \mathfrak{m}_B$ とする.

$$\langle [X_F, Z], X_B \rangle = \langle X_F, [Z, X_B] \rangle = \langle X_F, [Z, X_B]_{\mathfrak{m}_F} \rangle = \langle X_F, [Z, X_B]^{\mathfrak{n}} \rangle = 0$$

より $[X_F, Z]_{\mathfrak{m}_B} = 0$ が成り立つ．ここで $[\mathfrak{m}_F, \mathfrak{m}_B] \subset \mathfrak{m}_B$ から $[X_F, Z] = 0$, すなわち $[\mathfrak{m}_F, Z] = 0$ が示せた．$\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}_F$ であったので, 以上の事から $\mathfrak{m}_B \cap \mathrm{center}(\mathfrak{n})$ は $\mathfrak{h}$-不変である．Q.E.D.

前節で定義した写像 J も compact Lie 群の言葉で簡単に表すことができる.

命題 6 (G,H,K) から構成された *Lie* 環 $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle)$ に対して次が成立する：

$$J_Z(X) = [Z, X] \quad \textit{for every} \quad Z \in \mathfrak{m}_F, X \in \mathfrak{m}_B.$$

証明. 任意の $Z \in \mathfrak{m}_F$, $X, Y \in \mathfrak{m}_B$ に対して,

$$\langle Z, [X,Y]^{\mathfrak{n}} \rangle = \langle Z, [X,Y]_{\mathfrak{m}_F} \rangle = \langle Z, [X,Y] \rangle = \langle [Z,X], Y \rangle$$

となる．よって J の定義式 (1) より $J_Z(X) = [Z, X]$ である． Q.E.D.

次に等質束から構成された Lie 群 $(N, \langle\ ,\ \rangle)$ の等長変換群について調べる．特に弱対称性について考える時, isotropy 表現が重要であった．G/K の原点での接空間と N の単位元での接空間は共に $\mathfrak{m}_F \oplus \mathfrak{m}_B$ と同一視できる．N の単位元での isotropy 部分群を $A(N)$ で表す.

命題 7 (G,H,K) から構成された *Lie* 群を $(N,\langle\ ,\ \rangle)$ とすると, K は $A(N)$ の部分群である.

証明. $A(N)=\mathrm{Aut}(\mathfrak{n})\cap O(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$ であった. K の元が内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つことは明らかなので, 積を保つことを示せば良い.

$Z,Z'\in\mathfrak{m}_F$, $X,X'\in\mathfrak{m}_B$ とする. 任意の $g\in K$ に対して,

$$g([Z+X,Z'+X']^{\mathfrak{n}})=g([X,X']_{\mathfrak{m}_F})=[g(X),g(X')]_{\mathfrak{m}_F}$$

となる. ここで g は $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{m}_F$, $\mathfrak{m}_B$ をそれぞれ保つことに注意する. 一方,

$$[g(Z+X),g(Z'+X')]^{\mathfrak{n}}=[g(X),g(X')]^{\mathfrak{n}}=[g(X),g(X')]_{\mathfrak{m}_F}$$

である. よって $K\subset\mathrm{Aut}(\mathfrak{n})$ も示せた. Q.E.D.

K と $A(N)$ は一致している場合もあるが, 一般には次元すら一致するとは限らない. 例は後で述べることにする.

次に, 等質束から構成された Lie 環がいつ H-type になるか, について調べたい.

定理 8 $(G,K{\cdot}\mathrm{Spin}(m+1),K{\cdot}\mathrm{Spin}(m))$ から構成された *Lie* 環 $(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$ は, 底空間の *isotropy* 表現の $\mathrm{Spin}(m+1)$ への制限が *spin* 表現であるときには *H-type* になる.

証明. 仮定をみたす等質束に対して, $\mathrm{spin}(m+1)=\mathrm{spin}(m)\oplus\mathfrak{m}_F$ が成り立つ. ここで $\mathfrak{m}_F$ は m 次元. $J:\mathfrak{m}_F\to\mathrm{End}(\mathfrak{m}_B)$ は $\mathfrak{g}$ の bracket 積と一致していた (命題 6). よって J は $\mathrm{spin}(m+1)$ の作用に拡張できるが, $\mathrm{spin}(m+1)$ の $\mathfrak{m}_B$ への作用は spin 表現なので, 結局 Clifford algebra $Cl(\mathfrak{m}_F,\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{m}_F\times\mathfrak{m}_F})$ の作用に拡張できる. よって $(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$ は H-type である. Q.E.D.

例 9 *Hermit* 対称空間上の S^1-束 $(G,K{\cdot}U(1),K)$ から構成された *Lie* 環 $(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$ は *center* の次元が 1 の *H-type algebra* である. (このような G/K は φ*-symmetric* と呼ばれる.)

証明. Hermit 対称空間の isotropy 表現の $U(1)$ への制限は, 自然な $\mathbf{C}$ への作用の直和となる. $U(1)\cong\mathrm{Spin}(2)$ であり, その $\mathbf{C}$ への作用は spin 表現であるので, 定理より $(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$ は H-type である. Q.E.D.

複素射影空間 $SU(n+1)/S(U(n)\times U(1))$ 上の S^1-束から構成される Lie 環 $(\mathfrak{n},\langle\ ,\ \rangle)$ を考える. この時 $\dim\mathfrak{n}=2n+1$ である. center が 1 次元の H-type algebra は, 先の分類の結

果から次元で完全に決まり, また偶数次元のものはないので, この方法で全て得られることが分かる.

また, 他の Hermit 対称空間から構成しても同じ Lie 環が構成される. ところが, Hermit 対称空間は次元では決まらず, isotropy 部分群も当然異なるものがいくつもある. よって, K と $A(N)$ が一致しないものも存在することが分かる.

例 10 四元数ケーラー対称空間上の S^2-束 $(G, K\cdot Sp(1), K\cdot U(1))$ から構成された *Lie* 環 $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle)$ は *center* の次元が 2 の *H-type algebra* である. (このような $G/KU(1)$ は $G/KSp(1)$ 上の *twistor space* と呼ばれる.)

証明. 例 9 と同様に, $G/K\cdot Sp(1)$ の isotropy 表現の $Sp(1)$ への制限は $\mathbf{H}$ への右からの作用の直和になる. これは $Sp(1) \cong \mathrm{Spin}(3)$ の spin 表現と同値. Q.E.D.

四元数射影空間 $Sp(n+1)/Sp(n)\times Sp(1)$ 上の twistor space から構成される Lie 環 $(\mathfrak{n}, \langle\ ,\ \rangle)$ を考える. 上の center の次元が 1 の場合と全く同様の理由によって, center の次元が 2 の H-type algebra はこの方法で全て得られる.

他に, 定理 8 の仮定を満たす対称空間としては, 次のものがある (cf. [11]) :

$$Sp(n+2)/Sp(n)\times Sp(2),\ SU(n+4)/S(U(n)\times U(4)),$$
$$F_4/\mathrm{Spin}(9),\ E_6/U(1)\cdot\mathrm{Spin}(10),\ E_7/Sp(1)\cdot\mathrm{Spin}(12),\ E_8/SO(16)^\sharp.$$

本節の最後に, 我々の構成と森の graded Lie 環を使った構成の関連について述べたい.

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \mathfrak{g}_{-2}^{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{g}_{-1}^{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{g}_0^{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{g}_1^{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{g}_2^{\mathbf{C}}$$

を第 2 種複素単純 graded Lie 環とする. $\mathfrak{g}$ の (charaterristic element と直交するような) compact real form を $\mathfrak{g}$ とおく. さらに

$$\mathfrak{g}_{[k]} := \mathfrak{g} \cap (\mathfrak{g}_{-k}^{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{g}_k^{\mathbf{C}})$$

とおく. すると $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[2]})$ は既約対称対であり, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[2]}, \mathfrak{g}_{[0]})$ は既約対称空間上の等質束となる. (我々の構成は Lie 環のみにしか依存しないので, 等質束も Lie 環で表すことにする.) この等質束から 2-step nipotent Lie 環 $\mathfrak{n}$ を構成すると, $\mathfrak{m}_F = \mathfrak{g}_{[2]} \cong \mathfrak{g}_2^{\mathbf{C}}$, $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{g}_{[1]} \cong \mathfrak{g}_1^{\mathbf{C}}$ であることから, $\mathfrak{n} \cong \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ であることが証明できる.

すなわち我々の構成法は, 等質束が複素単純 graded Lie 環から来ている場合 (i.e., 対称空間上の twistor ([5]) の場合) には森の方法と一致している.

4 Symmetric-like properties

本節では, (G,H,K) から構成された Lie 群 $(N,\langle\ ,\ \rangle)$ が弱対称になるか, g.o. になるか, について調べる. 次の定理のように, 等質束の全空間 G/K との間に関係がある.

$a,b>0$ に対して, $-aB\mid_{\mathfrak{m}_F\times\mathfrak{m}_F}-bB\mid_{\mathfrak{m}_B\times\mathfrak{m}_B}$ から決まる G/K 上の G-不変計量を $g_{a,b}$ で表すことにする.

定理 11 (G,H,K) から構成された *Lie* 群を $(N,\langle\ ,\ \rangle)$ とする. 全ての a,b に対して $(G/K,g_{a,b})$ が G に関して弱対称ならば, $(N,\langle\ ,\ \rangle)$ も弱対称になる. さらに, $K=A(N)$ が成立すれば逆も成り立つ.

証明. 命題 7 より $K\subset A(N)$ である. G/K の原点での接空間と N の単位元での接空間は共に $\mathfrak{m}_F\oplus\mathfrak{m}_B$ と同一視できることに注意する. 弱対称であるための必要十分条件は, isotropy 表現によって任意の元を -1 倍できることであった (定理 1).

G/K が弱対称であるとする. すると $\mathfrak{m}_F\oplus\mathfrak{m}_B$ の任意の元は K の元で -1 倍でき, K の元でできるならば $A(N)$ の元でもできる. よって N も弱対称である.

また, $K=A(N)$ が成り立っているなら, isotropy 表現は完全に一致するので, 明らかに逆が成り立つ. Q.E.D.

等質空間 $SU(n+1)/SU(n)=U(n+1)/U(n)$ は弱対称である ([4]). よって例 9 および定理 11 より center の次元が 1 の H-type 群は弱対称であることが示せる. 同様に, $Sp(n+1)/U(1)\times Sp(n)$ は弱対称である ([15]) ので, center の次元が 2 の H-type 群も弱対称である. これらの H-type 群が弱対称であることは既に知られている ([2]) が, 定理 11 を使って新しい弱対称空間の例を構成することができる.

例 12 等質束 $(\mathrm{Spin}(8),\mathrm{Spin}(7),G_2)$ から構成された *Lie* 群 $(N,\langle\ ,\ \rangle)$ は *singular* な弱対称空間.

証明. $\mathrm{Spin}(8)/G_2$ は任意の Spin(8)-不変計量に関して弱対称である ([15]). よって定理 11 より $(N,\langle\ ,\ \rangle)$ も弱対称. singular であることは $\dim\mathfrak{m}_F=7=\dim\mathfrak{m}_B$ から示される ([7]). Q.E.D.

この例から singular な 2-step nilpotent 群で弱対称 (よって g.o.) となるものが存在することが分かった.

次に g.o. であるかどうかについて考える. 上の弱対称性と全く同様の定理が成り立つ.

定理 13 (G,H,K) から構成された *Lie* 群を $(N,\langle\ ,\ \rangle)$ とする．全ての a,b に対して $(G/K,g_{a,b})$ が G に関して *g.o.* ならば，$(N,\langle\ ,\ \rangle)$ も *g.o.* になる．さらに，$K=A(N)$ が成立すれば逆も成り立つ．

証明. 等質束が g.o. であるための必要十分条件は Lie 環の言葉で述べることができる ([8])：

$$\forall v_F \in \mathfrak{m}_F, v_B \in \mathfrak{m}_B, \exists X \in \mathfrak{k} \ \text{ s.t. } \ [X,v_F]=0 \ \text{ and } \ [X,v_B]=[v_F,v_B].$$

さらに，2-step nilpotent Lie 群が g.o. であるための必要十分条件も知られている ([8])：

$$\forall v_F \in \mathfrak{z}, v_B \in \mathfrak{v}, \exists D \in \mathfrak{a}(N) \ \text{ s.t. } \ D(v_F)=0 \ \text{ and } \ D(v_B)=J_{v_F}(v_B).$$

ここで $\mathfrak{a}(N)$ は N の skew-symmetric derivation の全体，すなわち $A(N)$ の Lie 環を表す．$\mathfrak{z}=\mathfrak{m}_F$, $\mathfrak{v}=\mathfrak{m}_B$, $J_{v_F}(v_B)=[v_F,v_B]$ 等に注意する．

よって，G/K が g.o. であるなら，$\mathfrak{k}\subset\mathfrak{a}(N)$ より，N も g.o. である．また $K=A(N)$ ならば明らかに逆も成り立つ． Q.E.D.

等質束 $(SO(n+8), SO(8)\times SO(n), \mathrm{Spin}(7)\times SO(n))$ から構成された Lie 群 $(N,\langle\ ,\ \rangle)$ を考える．この等質束は定理 8 の仮定は満たさないが，同様の議論によって $(N,\langle\ ,\ \rangle)$ が H-type になることが分かる．Lie 環 $\mathfrak{n}$ の center の次元は 7 であり，$\mathfrak{n}=\mathfrak{n}(n,0)$ である．さらに，この場合には $K=A(N)$ が成り立っている ([12])．これらについて，次の事が知られている．

- $SO(n+8)/\mathrm{Spin}(7)\times SO(n)$ は，

  $n=1$ のときは弱対称 ([4]),

  g.o. $\Leftrightarrow n=1,2,3$ ([14]).

- $\dim\mathfrak{z}=7$ の H-type 群 $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}(n,0)$ は，

  弱対称 $\Leftrightarrow n=1,2$ ([2]),

  g.o. $\Leftrightarrow n=1,2,3$ ([13]).

定理 13 で示した通り，g.o. であるかどうかについて duality が成立していることが分かる．弱対称性については，H-type 群について知られていることを元にして等質束を調べることができる．定理 11 と $K=A(N)$ が成り立っていることから，次の結果を得る．

定理 14 $SO(10)/\mathrm{Spin}(7)\times SO(2)$ は任意の $SO(10)$-不変計量に関して弱対称である．$SO(11)/\mathrm{Spin}(7)\times SO(3)$ は少なくとも $SO(11)$ に関しては弱対称ではない．

5 最後に

本稿では，等質束から 2-step nilpotent Lie 群を構成し，その両者を関連付けて調べた．等質束について知られていることを使って 2-step nilpotent Lie 群を調べ，また逆に 2-step nilpotent Lie 群の結果を用いて等質束を調べることができた．

今回研究したのは弱対称あるいは g.o. といった性質であったが，これらの性質に関しては両者は強く関連していることが分かった．isotropy 表現が等しいというのは非常に強い制約であると思われるので，他の幾何的性質についても関係があることが期待される．

最後の最後になりましたが，多くの助言を頂いた上智大学の長野正先生，金行壮二先生，また貴重なヒントを頂いた大阪大学の森邦彦さんに感謝致します．

References

[1] J. Berndt, O. Kowalski and L. Vanhecke, Geodesics in weakly symmetric spaces, *Ann. Global analsis and Geom.* **15** (1997), 153-156.

[2] J. Berndt, F. Ricci and L. Vanhecke, Weakly symmetric groups of Heisenberg type, *Diff. Geom. Appl.* **8** (1998), 275-284.

[3] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*, Lecture Notes in Math. **1598**, Springer-Verlag, Berlin Heidelbelg 1995.

[4] J. Berndt and L. Vanhecke: *Geometry of weakly symmetric spaces*, J. Math. soc. Japan **48** (1996), 745-760.

[5] R. L. Bryant, Lie groups and twistor spaces, *Duke Math. J.* **52** (1958), 223-261.

[6] P. Eberlein, Geometry of 2-step nilpotent Lie groups with a left invariant metric, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **27** (1994), 611-660.

[7] P. Eberlein, Geometry of 2-step nilpotent Lie groups with a left invariant metric II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **343** (1994), 805-828.

[8] C.S. Gordon: *Homogeneous Riemannian manifolds whose geodesics are orbits*, Topics in Geometry: In Memory of Joseph D'Atri (Ed. S. Gindikin), Progress in Nonlinear Differential Equations **20**, Birkhäuser-Verlag, Boston, Basel, Berlin, 1996, 155-174.

[9] A. Kaplan, Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules, *Geom. Dedicata* **11** (1981), 127-136.

[10] K. Mori, Einstein metrics on Boggino-Damek-Ricci-type solvable groups, preprint.

[11] T. Nagano, Symmetric spaces and quaternionic structure, preprint.

[12] C. Riehm, The automorphism group of a composition of quadratic forms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **269** (1982), 403-414.

[13] C. Riehm, Explicit spin representations and Lie algebras of Heisenberg type, *J. London Math. Soc.* (2) **29** (1984), 403-414.

[14] H. Tamaru, Riemannian g.o. spaces fibered over irreducible symmetric spaces, preprint.

[15] W. Ziller, Weakly symmetric spaces, *Topics in Geometry: In Memory of Joseph D'Atri* (Ed. S. Gindikin), Progress in Nonlinear Differential Equations **20**, Birkhäuser-Verlag, Boston, Basel, Berlin, 1996, 355-368.